

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

М.А. Кирсанов, В.В. Кушин, Н.А. Миханчук, С.Г. Покачалов

ВВЕДЕНИЕ В МЕТОДИКУ ЯДЕРНО- ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Лабораторная работа

МОСКВА 2006

ВВЕДЕНИЕ В МЕТОДИКУ ЯДЕРНО-ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Лабораторная работа

Содержание

Предисловие	4
1. Функциональная схема лабораторных установок	4
2. Источники излучений	5
3. Методы регистрации излучений	9
3.1. Ионизационный метод регистрации.....	9
3.2. Газовые ионизационные детекторы.....	12
3.3. Твердотельные ионизационные детекторы.....	16
3.4. Сцинтилляционный детектор.....	17
4. Регистрирующая аппаратура	19
4.1. Усилительные и согласующие устройства.....	19
4.2. Амплитудный анализ.....	22
5. Описание стандартных экспериментальных методов	27
5.1. Энергетическая калибровка спектрометра и измерение абсолютного и относительного энергетического разрешения.....	27
5.2. Выбор времени измерения по заданной статистической ошибке.....	28
6. Вводное занятие в лаборатории «Методы регистрации излучений»	30
Рабочее задание.....	30
Контрольные вопросы и задания.....	31
Список литературы.....	33
Приложение 1. Требования, предъявляемые к отчету по лабораторной работе	34
Приложение 2. Основные формулы для вычисления ошибок результатов измерений	35

ПРЕДИСЛОВИЕ

Освоение лабораторного практикума начинается с выполнения вводного занятия. Основная задача этого занятия заключается в приобретении навыков работы на лабораторных установках и изучении некоторых стандартных экспериментальных методик, используемых в лабораторных работах.

Рабочее задание вводного занятия предваряется описанием функциональной схемы лабораторных установок и регистрирующей аппаратуры, коротко рассматривается принцип действия ионизационных и сцинтилляционных детекторов, вводятся понятия основных характеристик детекторов, необходимых для выполнения лабораторных работ практикума.

1. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХЕМА ЛАБОРАТОРНЫХ УСТАНОВОК

Общая функциональная схема эксперимента, связанная с регистрацией и анализом излучений, представлена на рис. 1.



Рис. 1. Функциональная схема лабораторных установок

Излучение от источника попадает в объем детектора. Детектор – это устройство, в веществе которого ионизирующее излучение теряет часть или всю свою энергию, что приводит к появлению сигнала на его выходе. Регистрирующая аппаратура осуществляет, если это необходимо, усиление сигнала, его формирование, отбор и запоминание информации о сиг-

нале, в которой содержатся сведения как об излучении, так и о детекторе. В зависимости от цели исследования объектом его может служить либо само излучение, либо источник излучения, либо детектор.

2. ИСТОЧНИКИ ИЗЛУЧЕНИЙ

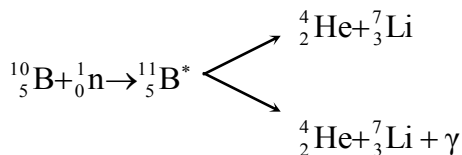
Источниками излучений могут быть радиоактивный препарат, ускоритель заряженных частиц, нейтронный генератор, ядерный реактор, термоядерные установки, окружающая среда, космические объекты.

С точки зрения процесса взаимодействия ионизирующего излучения с веществом детектора, а следовательно, и разнообразия методов детектирования, все виды излучений целесообразно разбить на два класса: заряженные частицы и незаряженные частицы. Заряженная частица, проходя через вещество детектора, испытывает ионизационные потери, что приводит к ионизации и возбуждению вещества.

Регистрация незаряженных частиц (гамма-квантов, нейтронов, нейтрино и др.) происходит по создаваемым ими в объеме детектора вторичным заряженным частицам, которые, в свою очередь, испытывают ионизационные потери.

Например, гамма-кванты регистрируются по вторичным электронам, образующимся за счет одного из процессов: фотоэффекта, комптон-эффекта, образования электрон-позитронных пар. Вторичные электроны, в свою очередь, испытывают ионизационные потери в рабочем веществе детектора.

Нейтроны, в зависимости от их энергии, регистрируются по ядрам отдачи или по заряженным продуктам ядерных реакций. Так, например, при регистрации тепловых нейтронов используется реакция на ядре $^{10}_5\text{B}$:



Образовавшиеся в реакции заряженные частицы (альфа-частица и ядро лития) производят ионизацию и возбуждение рабочего вещества.

Источниками заряженных и незаряженных частиц, используемых в лаборатории, являются радиоактивные препараты различных типов и космические частицы (первичная компонента – быстрые космические протоны, вторичная – релятивистские электроны, мезоны, гамма-кванты).

К радиоактивным препаратам как источникам заряженных частиц относятся источники альфа-частиц, которые выполнены в виде плоских металлических дисков, играющих роль подложки, с нанесенным на ее центральную часть тонким слоем радиоактивного препарата (${}^{239}\text{Pu}$, ${}^{238}\text{Pu}$, ${}^{233}\text{U}$ и др.) Энергетическое распределение альфа-частиц, вылетевших при распаде ядер, дискретно. Обычно спектр состоит из нескольких линий. Естественная ширина линии очень мала. Хорошо известные значения энергий каждой группы альфа-частиц, малая естественная ширина линии, а также существование нескольких линий у одного источника позволяют использовать альфа-источники для энергетической градуировки спектрометрических трактов и определения энергетического разрешения различных детекторов.

Очевидно, что эти свойства можно реализовать, если альфа-источник изготовлен в виде слоя, толщина которого намного меньше длины свободного пробега частицы в веществе источника, чтобы неопределенность в значении энергии альфа-частиц, вышедших из источника, была небольшой.

Стандартный комплект образцовых спектрометрических альфа-источников (ОСАИ), используемых в лабораторных

работах, полностью удовлетворяет требованиям, указанным выше.

При бета-распаде нестабильных ядер, помимо излучения бета-частицы (или позитрона), возникает нейтрино. Спектр бета-частиц непрерывен. В большинстве случаев конечное ядро при бета-распаде остается в возбужденном состоянии, что приводит, во-первых, к усложнению спектра бета-частиц (за счет появления электронов конверсии) и, во-вторых, к появлению гамма-квантов, испускаемых конечным ядром. Количество ядер, распад которых происходит только в основное состояние, очень невелико (^{210}Bi , ^3H , ^{90}Sr). Однако изготовить бета-источники, совсем не излучающие гамма-кванты, не удастся по двум причинам: 1) возникает тормозное излучение при движении легкой частицы в плотной среде (в материале источника или подложки); 2) перестройка электронной оболочки атома, ядро которого совершило бета-переход, сопровождается появлением характеристического рентгеновского излучения. Если же источник испускает позитроны, то при аннигиляции их в материале источника или подложки дополнительно возникают фотоны с энергией 0,511 МэВ.

Гамма-излучение возникает при переходах между различными энергетическими уровнями возбужденных ядер. Ядро может возбуждаться различными путями: в цепочках радиоактивных распадов, в результате различных ядерных реакций и т.д. В этих случаях спектр гамма-излучения дискретный. Кроме этого, коротковолновое электромагнитное излучение возникает при торможении быстрых электронов в среде. Спектр тормозного излучения непрерывен. Важный механизм возникновения высокоэнергетичных гамма-квантов – аннигиляция электронно-позитронных пар.

Наиболее удобные для лабораторных исследований гамма-источники – это радиоактивные изотопы, в которых происходит бета-распад. Поскольку время жизни ядер по отношению к гамма-переходам велико по ядерным масштабам времени (обычно больше 10^{-15} с), то естественная ширина гамма-

линии в миллионы раз меньше их энергии, поэтому ею можно пренебречь и считать гамма-излучение из ядра моноэнергетическим.

Часто возбуждение конечного ядра при бета-распаде снимается несколькими путями. В этом случае из источника испускаются гамма-кванты с разными энергиями, т.е. источник имеет несколько линий, обладающих различными интенсивностями.

В лабораторных работах используются закрытые источники гамма-квантов, помещенные в специальные контейнеры, и образцовые спектрометрические гамма-источники (ОСГИ), в которых радиоактивный препарат размещен между двумя тонкими полиэтиленовыми пленками.

В качестве источников нейтронов могут служить радиоактивные препараты, различные ядерные устройства и аппараты (ядерный реактор, нейтронный генератор, нейтроны из мишеней электронных ускорителей и т.д.). Когда говорят о радиоактивных источниках, то имеют в виду образование нейтронов в реакциях (α, n) или (γ, n) с использованием радиоактивных ядер, испускающих альфа-частицы или гамма-кванты, например ${}^9\text{Be} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C} + n$.

Готовый изотопный источник представляет собой механическую смесь, сплав или химическое соединение альфа-излучателя и вещества мишени в герметической упаковке. В качестве альфа-источника наиболее часто используются ${}^{210}\text{Po}$, ${}^{239}\text{Pu}$ или ${}^{238}\text{Pu}$. Кроме Be, для получения нейтронов по (α, n) - реакции можно применить и другие легкие ядра, например, B или Li.

В лаборатории используется Pu-Be - источник, размещенный в парафиновом блоке, который окружен со всех сторон кадмием, эффективно поглощающим тепловые нейтроны.

3. МЕТОДЫ РЕГИСТРАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЙ

3.1. Ионизационный метод регистрации

В настоящее время на ионизационном методе регистрации работает большое количество совершенно различных детекторов. Принцип работы и схема включения таких приборов приведены на рис. 2.

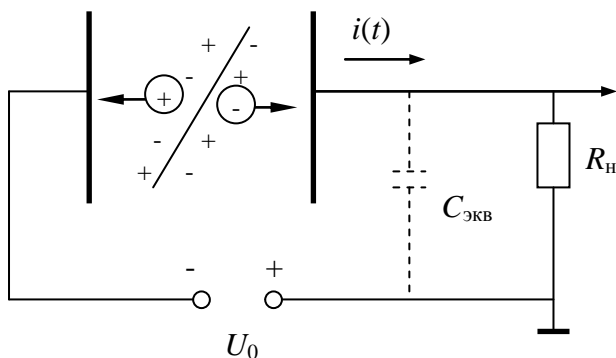


Рис. 2. Принцип действия и схема включения ионизационного детектора

Пространство между системой электродов (в простейшем случае – между двумя электродами) заполняется рабочим веществом (это может быть газ, жидкость, твердое тело), и к электродам прикладывается внешнее электрическое поле. Заряженные частицы теряют в рабочем веществе свою энергию, часть которой идет на ионизацию. В результате в рабочем веществе появляются свободные заряды – электроны и ионы. Образованные заряды под действием внешнего электрического поля перемещаются к электродам, что приводит к одновременному переносу индуцированного заряда во внешней цепи.

Любой ионизационный детектор может работать как в токовом, так и в импульсном режиме. При работе в токовом режиме измеряется среднее значение тока во внешней цепи детектора, т.е. суммарный ионизационный эффект, создаваемый излучением в рабочем объеме детектора.

При работе ионизационного детектора в импульсном режиме регистрируются импульсы от отдельных частиц. В этом случае значение амплитуды тока пропорционально среднему числу зарядов \bar{N} , образованных заряженной частицей в рабочем веществе детектора. В свою очередь, число зарядов \bar{N} однозначно связано с энергией, потерянной частицей:

$$\bar{N} = E/\omega,$$

где E – энергия падающей частицы; ω – средняя энергия, идущая на образование одной пары носителей заряда. Экспериментально установлено, что значение ω практически не зависит от энергии и типа частицы, поэтому по значению тока во внешней цепи можно судить об энергии, потерянной заряженной частицей в рабочем веществе детектора.

Импульсный режим достигается подбором загрузки детектора частицами и соответствующим образом выбранной схемой включения. В лаборатории все детекторы работают в импульсном режиме и включены во внешнюю цепь в соответствии с рис. 2. Внешняя цепь детектора состоит из последовательно включенного источника напряжения и сопротивления нагрузки R_n . При описании процесса протекания тока наряду с сопротивлением нагрузки R_n необходимо учитывать наличие емкостных параметров внешней цепи.

На рис. 2 эти параметры отражены введением эквивалентной емкости $C_{\text{экв}}$, обозначенной пунктиром. Значение $C_{\text{экв}}$ включает в себя собственную емкость детектора и емкость монтажа входных цепей. При таком включении детектора импульс тока интегрируется во внешней цепи и преобразуется в импульс напряжения. Амплитуда и форма импульса напряжения в этом случае определяются параметрами интегри-

рующей цепочки $R_n C_{\text{экв}}$. Так как в большинстве случаев стремятся сохранить максимальную амплитуду импульса напряжения на выходе детектора, к значениям $C_{\text{экв}}$ и R_n предъявляются вполне определенные требования. Поскольку амплитуда импульса напряжения $\Delta V \sim Q_0 / C_{\text{экв}}$, где Q_0 – заряд, накапливаемый на емкости $C_{\text{экв}}$, необходимо, прежде всего, обеспечить минимальное значение эквивалентной емкости $C_{\text{экв}}$. Это достигается рациональной конструкцией детектора и электронной схемы, подключенной к нему. Значение R_n выбирается так, чтобы постоянная интегрирования $R_n C_{\text{экв}}$ была заведомо больше длительности импульса тока детектора. В этом случае за время зарядки током емкости $C_{\text{экв}}$ разрядки ее через R_n происходить практически не будет. В импульсе напряжения, сформированном таким образом, фронт импульса определяется длительностью импульса тока, т.е. временем собирания на соответствующие электроды зарядов, образованных заряженной частицей. Спад импульса обусловлен скоростью разрядки емкости $C_{\text{экв}}$ через сопротивление R_n .

Стремление сохранить максимальную амплитуду импульса на выходе детектора приводит к увеличению длительности импульса и как следствие – росту вероятности наложения импульсов во входной цепи детектора (рис. 3).

Действительно, при облучении детектора радиоактивным источником импульсы тока появляются в произвольные моменты времени. Поэтому при больших нагрузках детектор может зарегистрировать новую частицу раньше, чем емкость успеет полностью разрядиться от предыдущей частицы. Возникающие наложения импульсов затрудняют или делают вообще невозможным измерение числа частиц и амплитуд импульсов от отдельных частиц. Чтобы устранить это нежелательное явление, в последующих электронных устройствах применяют укорачивающие схемы, которые разделяют импульсы (рис. 3, в).

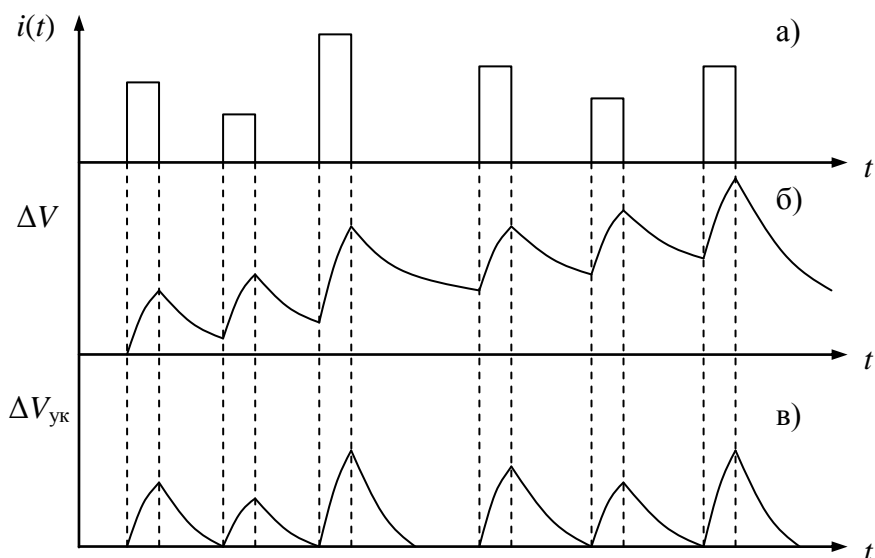


Рис. 3. Зависимость от времени: а – импульсов тока детектора; б – наложенных импульсов напряжения; в – укороченных импульсов напряжения

Как уже отмечалось ранее, рабочим веществом ионизационных детекторов могут быть газ, жидкость, твердое тело. В лаборатории представлены ионизационные детекторы, в которых в качестве рабочего вещества используются газ и твердое тело.

3.2. Газовые ионизационные детекторы

Обычно для наполнения газовых ионизационных детекторов применяются газы, в которых электроны, образованные заряженной частицей, при движении в электрическом поле остаются свободными, т.е. не захватываются молекулами или атомами газа с образованием отрицательных ионов. Такие газы называются *электроположительными газами*. К ним относятся часто применяющиеся в качестве рабочей среды

ионизационных детекторов инертные газы: аргон и ксенон. Выбор этих газов не случаен. Известно, что в газах скорость движения свободных электронов в направлении электрического поля, которую называют *скоростью дрейфа*, приблизительно на три порядка больше скорости движения отрицательных и положительных ионов. Следовательно, процесс зарядки эквивалентной емкости $C_{\text{экр}}$ электронным током также будет заканчиваться во времени на три порядка быстрее, чем процесс зарядки ионным током. Таким образом, если регистрировать только заряд, накопленный на $C_{\text{экр}}$ от протекания электронного тока, то можно на несколько порядков сократить длительность импульса от отдельной частицы. Поэтому использование в качестве рабочего вещества ионизационных детекторов электроположительного газа позволяет этим детекторам работать в импульсном режиме в интенсивных потоках частиц.

Существует несколько типов газовых ионизационных детекторов. Режим работы конкретного детектора зависит от разности потенциалов на его электродах, конфигурации электронов, давления газа. На рис. 4 приведена зависимость амплитуды импульса на выходе цилиндрического детектора от разности потенциалов на его электродах для различной ионизации, т.е. различного числа электрон-ионных пар \bar{N} , образованных частицами в рабочем объеме. Все широко используемые на практике режимы работы газовых ионизационных детекторов представлены на данной кривой.

При сравнительно небольших напряженностях электрического поля (рис. 4, область I) в объеме детектора ток и соответственно заряд на эквивалентной емкости пропорциональны числу электрон-ионных пар, образованных частицей в газе, и не зависят от разности потенциалов на электродах. Детекторы, работающие в таком режиме, называются *ионизационными камерами*. Если амплитуда импульса на выходе детектора пропорциональна энергии, поглощенной в объеме детектора, то такой детектор называют *пропорциональным*.

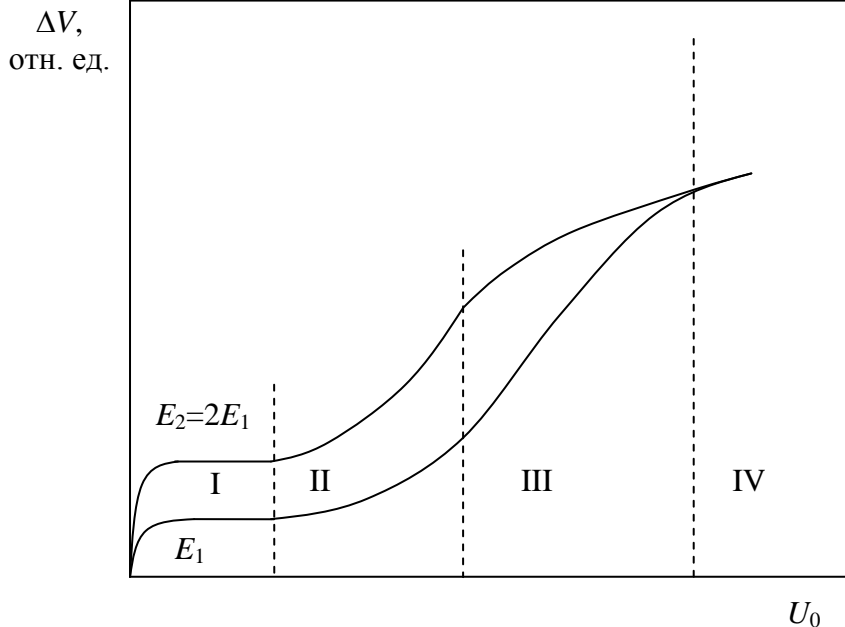


Рис. 4. Зависимость амплитуды импульса на выходе газового ионизационного детектора с цилиндрической геометрией электродов от напряжения для двух различных энергий E_1 и E_2

На рис. 4 видно, что газовая ионизационная камера является пропорциональным детектором, т.е. для нее выполняется соотношение $\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} = \frac{E_2}{E_1}$.

При более высоких значениях напряженности электрического поля дрейфующие электроны между соударениями с нейтральными атомами могут набрать энергию, достаточную для ионизации атомов газа (так называемая ударная ионизация). Очевидно, что процесс ударной ионизации приводит к увеличению числа электронов и ионов в рабочем объеме детектора. Так как с ростом напряженности электрического по-

ля вероятность ударной ионизации увеличивается, наблюдается резкая зависимость амплитуды импульса на выходе детектора от разности потенциалов на его электродах (рис. 4, область II). Примечательно, что при этом сохраняется пропорциональность между амплитудами импульсов и начальной ионизацией. Такой режим газового ионизационного детектора называется *режимом пропорционального усиления*, а детекторы, в которых он используется, рекомендуются называть *газовыми пропорциональными детекторами*¹.

Дальнейшее увеличение напряжения приводит к нарушению этой пропорциональности (рис. 4, область III). Наконец, при еще более высоких значениях напряженности электрического поля роль ударной ионизации оказывается настолько большой, что в детекторе возникает разряд, если попавшая в его объем заряженная частица создает в газе хотя бы одну электрон-ионную пару.

Другими словами, амплитуда импульса становится не зависимой от первичной ионизации (рис. 4, область IV). Газовые детекторы, работающие в этом режиме, называются счетчиками Гейгера – Мюллера. Счетчик Гейгера – Мюллера свойством пропорциональности не обладает, поэтому с его помощью фиксируется только факт регистрации частицы.

В лаборатории представлены газовые ионизационные детекторы, работающие во всех рассмотренных выше режимах.

¹ В литературе эти детекторы часто называют пропорциональными счетчиками, однако это название неудачно. Использование термина «счетчик» подразумевает, что с помощью такого детектора можно фиксировать только факт регистрации частицы. При этом импульсы на выходе счетчика никакой информации об энергии регистрируемого излучения не несут. Из рис. 4 видно, что газовые ионизационные детекторы, работающие в режиме пропорционального усиления, обладают свойством пропорциональности, поэтому целесообразно называть их детекторами, а не счетчиками.

3.3. Твердотельные ионизационные детекторы

Идея использования газа в качестве рабочего вещества ионизационных детекторов оказалась очень плодотворной и позволила создать большое количество разнообразных по своим характеристикам газовых детекторов, широко применяющихся в настоящее время на практике.

Однако можно отметить ряд недостатков, присущих газовым ионизационным детекторам, которые обусловлены именно применением газа как рабочего вещества. Это, прежде всего, малая плотность газа и, как следствие, трудности, связанные с регистрацией заряженных частиц высоких энергий (в особенности легких), а также незаряженных частиц. Другие недостатки подробно рассматриваются в лекционном курсе, отметим только, что они связаны с большим значением средней энергии на образование электрон-ионной пары ($\omega = 20 \div 30$ эВ) и малой скоростью дрейфа положительных ионов в газах. Переход от рабочего вещества ионизационных детекторов в виде газа к твердому телу устраняет недостатки, характерные для газовых ионизационных детекторов.

По принципу действия твердотельные ионизационные детекторы можно рассматривать как газовые ионизационные камеры с твердым диэлектриком между электродами. В качестве рабочего вещества твердотельных детекторов используются, как правило, полупроводниковые материалы, в основном кремний и германий, а детекторы в этом случае называют полупроводниковыми детекторами (ППД).

Использование кремния и германия связано с тем, что в этих веществах электроны и дырки, образованные заряженной частицей, имеют большую скорость дрейфа, большое время жизни и величину ω на порядок меньше, чем в газе. ППД являются пропорциональными детекторами. Схема включения ППД такая же, как и газовой ионизационной камеры.

В настоящее время развитие твердотельных ионизационных детекторов идет в направлении создания неоднородных ППД. В таких ППД используются свойства перехода между полупроводниками с разным типом проводимости или перехода между полупроводником и металлом. Необходимость создания в ППД перехода подробно рассматривается в лекционном курсе.

Твердотельный ионизационный детектор представлен в лаборатории кремниевым поверхностно-барьерным ППД, использующимся для регистрации альфа-частиц.

3.4. Сцинтилляционный детектор

Сцинтилляционный метод основан на регистрации коротких световых вспышек – сцинтилляций, возникающих в некоторых веществах (сцинтилляторах) при прохождении через них заряженных частиц. Кванты света возникают при переходах возбужденных молекул или атомов в основное состояние или при рекомбинации электрических зарядов. Сцинтилляторами могут быть твердые, жидкие и газообразные вещества. Время высвечивания (время, в течение которого число световых квантов уменьшается в e раз) для неорганических сцинтилляторов лежит в области ($10^{-6} - 10^{-7}$) с, органических – 10^{-9} с.

Для регистрации сцинтилляционных вспышек используют фотоэлектронные умножители (ФЭУ). Поэтому сцинтилляционный детектор состоит из двух составных частей: сцинтиллятора и ФЭУ (рис. 5).

При прохождении заряженной частицы в сцинтилляторе возникают фотоны, которые выбивают из фотокатода ФЭУ электроны. Электроны многократно умножаются в результате вторичной эмиссии с динодов, достигают анода, и во внешней цепи, состоящей из сопротивления нагрузки R_n и эквивалентной емкости $C_{экв}$, протекает ток, длительность которого определяется, в основном, временным распределением фото-

нов сцинтилляции. Все рассуждения относительно формирования сигнала в анодной цепи ФЭУ аналогичны проведенным для ионизационных детекторов, т.е. форма импульса зависит от соотношения величины $R_n C_{\text{экв}}$ и времени высвечивания сцинтиллятора.

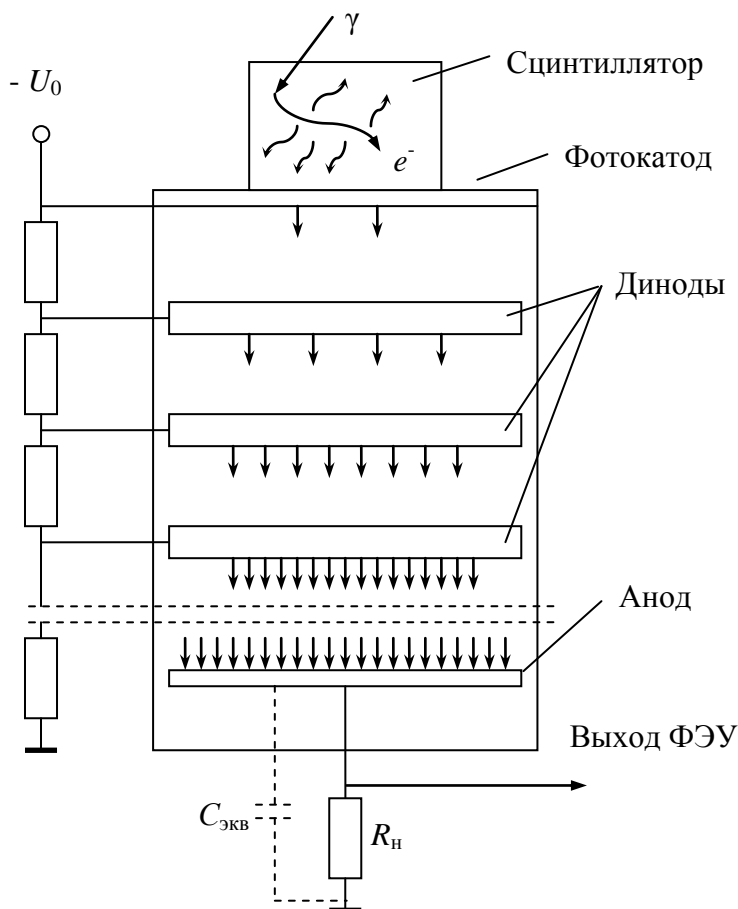


Рис. 5. Принцип действия и схема включения сцинтилляционного детектора

Сцинтилляционный метод по некоторым параметрам имеет преимущества перед ионизационным методом регистрации. Это, прежде всего (при соответствующем выборе сцинтиллятора), высокая разрешающая способность по времени и большая эффективность регистрации незаряженных частиц.

В лабораторном практикуме изучаются характеристики различных органических и неорганических сцинтилляторов.

4. РЕГИСТРИРУЮЩАЯ АППАРАТУРА

4.1. Усилительные и согласующие устройства

Как уже отмечалось выше, все детекторы, принцип действия которых изучается в лаборатории, работают в импульсном режиме. Во внешнюю цепь этих детекторов включено сопротивление нагрузки, и на интегрирующей цепи $R_n C_{\text{экв}}$ происходит преобразование импульса тока в импульс напряжения. Амплитуды импульсов напряжения на выходе детекторов имеют, как правило, небольшое значение. Действительно, проведем, например, оценку максимальной амплитуды импульса напряжения во внешней цепи импульсной ионизационной камеры, соответствующей энерговыделению в камере $E = 5$ МэВ (альфа-частица с энергией $E_\alpha = 5$ МэВ). Выберем значение эквивалентной емкости $C_{\text{экв}} = 10$ пФ.

Тогда

$$\Delta V = \frac{Q_0}{C_{\text{экв}}} = \frac{e\bar{N}}{C_{\text{экв}}} = \frac{eE_\alpha}{\omega C_{\text{экв}}},$$

где Q_0 – заряд, накапливаемый на емкости $C_{\text{экв}}$ за счет протекания тока во внешней цепи камеры; \bar{N} – число электрон-ионных пар, образованных частицей в рабочем веществе (наполнение камеры – аргон); ω – средняя энергия на образование одной пары зарядов ($\omega_{\text{Ar}} \approx 25$ эВ); e – заряд электрона. Подставляя в формулу соответствующие величины, получаем:

$$\Delta V = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^6}{25 \cdot 10^{-11}} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

Таким образом, даже для выбранного небольшого значения $S_{\text{экв}}$ амплитуда сигнала на выходе ионизационной камеры составляет единицы милливольт. Очевидно, что такая же оценка, проведенная для ППД, дает значение амплитуды в лучшем случае только на порядок больше.

Амплитуды сигналов от детекторов с газовым усилением и сцинтилляционных детекторов могут составлять от 10^{-2} В до нескольких вольт.

Современная регистрирующая и анализирующая аппаратура работает с сигналами, амплитуды которых лежат в диапазоне порядка 1 – 10 В. Поэтому сигналы с детекторов необходимо усиливать или, по крайней мере, как в случае работы со счетчиками Гейгера или сцинтилляционными детекторами, пропускать через согласующие цепи – эмиттерные повторители.

К усилителям, которые используются для усиления сигналов с детекторов, предъявляется ряд требований:

- усилители должны обладать большим коэффициентом усиления;
- усилитель, подключенный к детектору, должен иметь по возможности минимальный уровень шумов. При усилении слабых сигналов с детекторов излучений серьезные трудности вызывают так называемые шумы – флуктуации напряжений, возникающие в усилителях за счет флуктуации электрических зарядов в транзисторах и деталях схем. Шумовые импульсы накладываются на исследуемые сигналы с детектора и приводят к флуктуациям амплитуды этих сигналов. Шумы могут возникать в любой точке установки, но очевидно, что наибольший вклад в суммарный уровень шумов на выходе усилителя дает шум первого каскада усиления;
- для получения максимальной амплитуды импульсов на выходе детектора приходится выбирать большое значение

сопротивления нагрузки R_n , поэтому сигналы имеют продолжительный спад. Это приводит к наложению сигналов и в итоге, если не принять специальных мер, амплитуды таких наложенных импульсов будут отличаться от амплитуд импульсов, соответствующих отдельным частицам, и измерения дадут неверный результат.

Для устранения этого явления в усилителях обычно после первого каскада усиления вводят дифференцирующую $R_d C_d$ - цепочку, на которой происходит укорачивание сигнала (рис. 6).

Уровень шумов усилителя зависит от полосы пропускания усилителя. Функцию элемента, задающего нижнюю частоту полосы пропускания в усилителе, обычно выполняет дифференцирующая $R_d C_d$ - цепочка, которая одновременно используется для укорачивания импульсов. Верхняя полоса пропускания определяется интегрирующей $R_n C_n$ - цепочкой, специально вводимой для этих целей в усилитель (см. рис. 6).

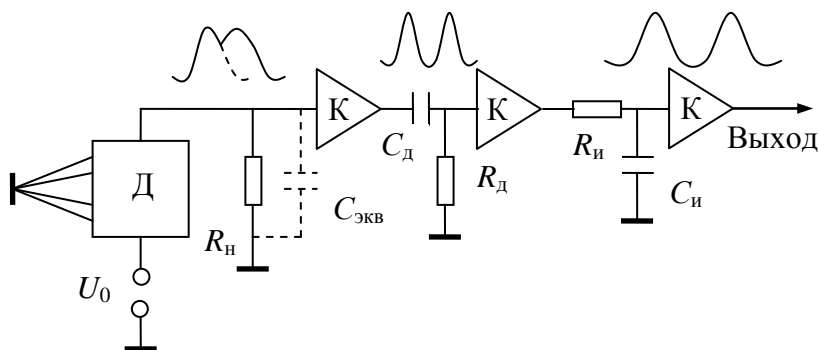


Рис. 6. Формирование сигнала с детектора в усилителе

В лаборатории для усиления сигналов с импульсной ионизационной камеры, газового пропорционального детектора, ППД используется усилитель, удовлетворяющий всем пере-

численным выше требованиям. Этот стандартный усилитель, который называется спектрометрическим усилителем, состоит из двух блоков: предусилителя БУС2-01-1 и основного усилителя БУС2-47. Предварительный усилитель размещается непосредственно у детектора, что позволяет свести к минимуму эквивалентную емкость детектора $C_{\text{экв}}$.

В лабораторных работах «Счетчик Гейгера – Мюллера» и «Сцинтилляционный детектор», где, как уже отмечалось, амплитуда сигнала значительно больше, для усиления и формирования сигнала используются эмиттерный повторитель, играющий роль согласующего каскада, и усилитель с небольшим коэффициентом усиления.

4.2. Амплитудный анализ

Импульс на выходе усилительного тракта характеризуется следующими параметрами: амплитудой, полярностью, длительностью, временем нарастания переднего фронта, временем спада. Для контроля за наличием импульсов с детектора, измерением амплитуды и временных параметров на выходе усилительного тракта или согласующих схем используется осциллограф.

Импульсы несут различную информацию о регистрируемом излучении. Число импульсов в секунду характеризует интенсивность излучения, их форма может дать информацию о виде излучения, амплитуда импульсов, как правило, определяется энергией, которую потеряла заряженная частица в рабочем веществе детектора. Так как в лаборатории основное внимание уделяется изменению амплитуд импульсов, рассмотрим этот вопрос более подробно.

По определению, детекторы, у которых величина амплитуды в среднем своем значении прямо пропорциональна потерянной в детекторе энергии, называются *пропорциональными детекторами*.

Анализ работы импульсной ионизационной камеры, пропорционального детектора с газовым усилением, ППД и сцинтилляционного детектора показал, что амплитуда импульсов на выходе этих детекторов пропорциональна энергии частицы. Следовательно, измеряя амплитуды импульсов на выходе усилительных устройств, подключенных к пропорциональным детекторам, можно определить энергию, потерянную заряженной частицей в рабочем веществе.

Выше для упрощения предполагалось соответствие между амплитудой импульса и энергией частицы, потерянной в объеме детектора. В реальных случаях такое соответствие никогда не выполняется по целому ряду причин.

Во-первых, заряженная частица в детекторе теряет свою энергию по нескольким каналам (например, на ионизацию и возбуждение рабочего вещества), и соотношение между этими потерями энергии носит статистический характер. Статистический характер носят также процессы в детекторе, связанные с движением носителей заряда, образованных частицей.

Во-вторых, всегда имеет место дополнительный разброс амплитуд импульсов за счет разного рода токов утечек через детектор при подаче на него внешнего электрического поля. Кроме того, как уже отмечалось выше, на исследуемые сигналы с детектора накладываются шумовые импульсы усилителя, что также приводит к флуктуациям амплитуд полезных сигналов. Поэтому при поглощении в детекторе моноэнергетических заряженных частиц импульсы на выходе усилительных устройств, подключенных к детектору, всегда имеют некоторый разброс по амплитудам, т.е. вполне определенному значению энергии частиц соответствует некоторое распределение импульсов по амплитудам.

Очевидно, что распределение импульсов по амплитудам целесообразно характеризовать средним значением амплитуды и некоторым параметром, описывающим разброс амплитуд относительно среднего значения. Оценить среднее значе-

ние амплитуд импульсов можно с помощью осциллографа. Найти же закон, по которому распределены импульсы по амплитудам, позволяют специальные электронные устройства – многоканальные анализаторы импульсов. Идея работы этих приборов иллюстрируется рис. 7.

Диапазон амплитуд от 0 до $\Delta V_{\text{макс}}$ разбивается на равные по величине интервалы амплитуд. Число таких интервалов характеризует число каналов анализатора импульсов, а ширина интервала называется шириной канала. В многоканальном анализаторе в каждом канале происходит суммирование и запоминание числа импульсов, попавших в данный интервал амплитуд за время измерения.

Одним из основных элементов анализатора импульсов является преобразователь амплитуды импульса в код: амплитудно-цифровой преобразователь (АЦП). В лаборатории спектрометрическая плата АЦП размещена в системном блоке персонального компьютера. Порядок работы с амплитудным анализатором на базе персонального компьютера приведен в отдельной инструкции.

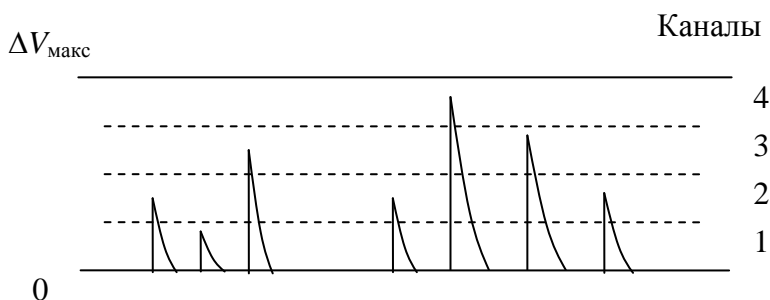


Рис. 7. Принцип получения распределения импульсов по амплитудам

Графически информация, полученная с помощью анализатора импульсов, обычно представляется в виде гистограммы,

где по оси абсцисс откладываются номера каналов N_k , а по оси ординат – число импульсов n , попавших в данный канал.

Второй способ графического представления информации с анализатора заключается в аппроксимировании гистограммы плавной кривой, которой последовательно соединяются ординаты центров каждого канала анализатора.

На рис. 8 приведены типичные распределения импульсов по амплитудам, получающиеся при регистрации ППД моноэнергетических альфа-частиц с энергией около 5 МэВ (рис. 8, а) и гамма-квантов с $E_\gamma = 662$ кэВ (^{137}Cs) сцинтилляционным детектором с неорганическим кристаллом (рис. 8, б).

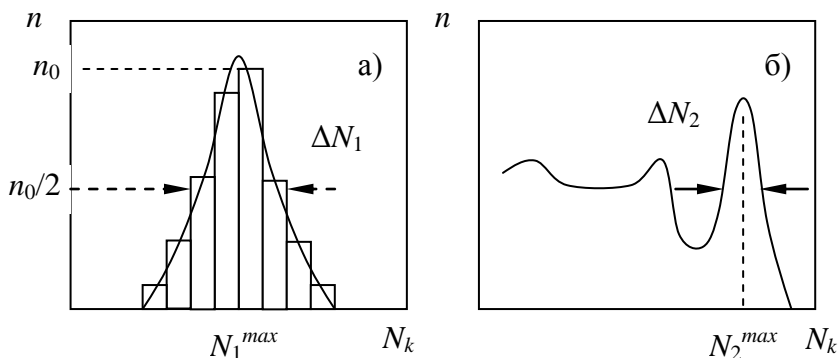


Рис. 8. Распределение импульсов по амплитудам: а – от α -частиц с $E_\alpha = 5$ МэВ в ППД; б – от γ -квантов с $E_\gamma = 662$ кэВ в сцинтилляционном детекторе

Распределение от альфа-частиц представляет собой кривую, близкую к нормальному распределению. Сложный характер распределения импульсов по амплитудам от гамма-квантов объясняется различными процессами взаимодействия гамма-квантов с веществом сцинтиллятора.

Если детектором регистрируются моноэнергетические частицы, то получающиеся распределения, по определению, называются *аппаратурной формой линии спектрометра*

(АФЛ). Под спектрометром в данном случае понимается система: детектор + регистрирующая аппаратура.

Таким образом, приведенные выше распределения являются АФЛ спектрометров альфа-частиц и гамма-квантов.

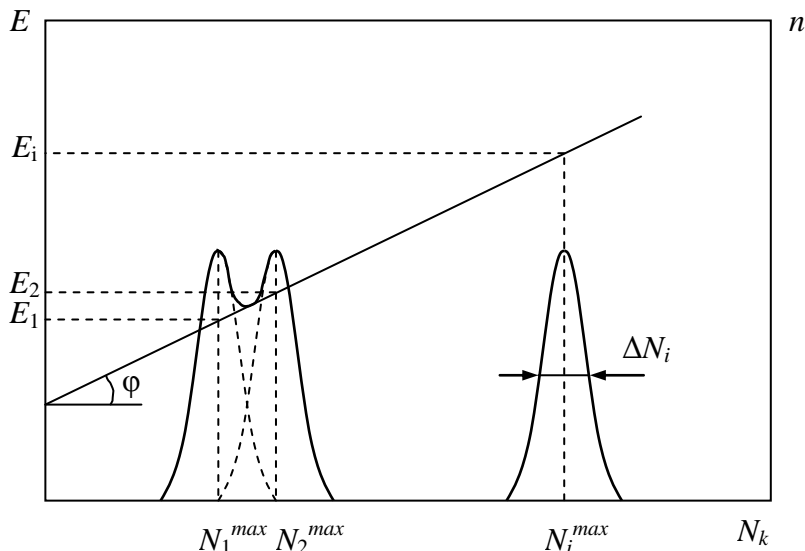


Рис. 9. Энергетическая калибровка спектрометра и измерение полного абсолютного энергетического разрешения для данной энергии частиц.

Для описания АФЛ принято использовать два параметра. Первый параметр – это положение максимума распределения, по которому при соответствующей калибровке спектрометра можно определить энергию частиц. Вторым параметром условились считать ширину распределения на его полувысоте ΔE_n , выраженную в единицах энергии. Этот параметр называют *полным абсолютным энергетическим разрешением спектрометра* для данной энергии частиц (рис. 9).

5. ОПИСАНИЕ СТАНДАРТНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ МЕТОДИК

5.1. Энергетическая калибровка спектрометра и измерение полного абсолютного и относительного энергетического разрешения

Как видно из рис. 9, второй параметр, введенный для описания АФЛ, – ширина распределения на его полувысоте выражается не в единицах энергии, а в числе каналов анализатора ΔN . Для определения величины ΔE_n в энергетических единицах необходимо обязательно провести калибровку спектрометра по энергии. С этой целью детектор облучают частицами известных энергий и на анализаторе снимают набор АФЛ. По результатам измерений строится зависимость между номерами каналов анализатора в максимуме распределения и энергией частиц.

Из полученной зависимости вычисляется ширина канала анализатора $\alpha = \text{tgf}$ в энергетических единицах (например, кэВ/канал). Величина ΔE_{ni} для энергии E_i находится из формулы: $\Delta E_{ni} = \Delta N_i \cdot \alpha$, где ΔN_i – число каналов, равное ширине распределения на его полувысоте для энергии E_i . Часто наряду с величиной ΔE_n пользуются понятием полного относительного энергетического разрешения спектрометра:

$$\delta = \frac{\Delta E_n}{E} \cdot 100\% .$$

Описание АФЛ с помощью величины полного абсолютного и относительного энергетического разрешения очень удобно, так как позволяет сделать вывод о способности спектрометра разрешить АФЛ от двух близко расположенных групп моноэнергетических частиц. Так, если частицы разной энергии дают АФЛ одинаковой интенсивности и расположены на расстоянии $E_2 - E_1 \geq \Delta E_n$, то линии наблюдаются еще раздельно (см. рис. 9).

5.2. Выбор времени измерений по заданной статистической ошибке

Все экспериментальные результаты, приводимые в отчете по лабораторной работе, должны содержать погрешности измерений и записываться в виде $\tilde{x} \pm \sigma(\tilde{x})$, где \tilde{x} – выборочное среднее значение искомой экспериментальной величины, $\sigma(\tilde{x})$ – оценка среднеквадратичного отклонения выборочного среднего. Если экспериментальные результаты приводятся графически, то соответствующие ошибки должны быть приведены на графике. Методика нахождения ошибок результатов измерений излагается в курсе «Методы обработки результатов измерений».

Поскольку в большинстве лабораторных работ основная задача заключается в снятии распределений импульсов по амплитудам с выхода спектрометра, рассмотрим только вопрос, связанный с выбором времени набора этих распределений.

Число частиц N , попадающих в детектор за какой-то интервал времени, является случайной величиной, и так как источники ионизирующих излучений, используемые в лабораторных работах, имеют периоды полураспада существенно больше, чем время отдельного измерения, то число событий, регистрируемых детектором, распределено по закону Пуассона:

$$P(N) = \frac{(\bar{N})^N}{N!} \cdot e^{-\bar{N}},$$

где \bar{N} – среднее число событий, зарегистрированных детектором.

Число импульсов, попадающих в какой-либо канал анализатора, является выборкой из исходного пуассоновского потока, причем осуществляемой случайным образом. Поэтому

число импульсов в любом канале анализатора флуктуирует в соответствии с законом Пуассона.

Известно, что для пуассоновского потока событий даже по числу событий N , полученному в одном измерении, можно сделать оценку среднеквадратичной флуктуации величины N :

$$\sigma = \sqrt{N}.$$

Тогда относительная ошибка величины N

$$\delta = \frac{\sigma}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Поэтому, если в лабораторной работе требуется выбрать время измерения таким образом, чтобы статистическая ошибка в максимуме амплитудного распределения составляла, например, не более 3 %, необходимо выполнить следующие операции:

- 1) из соотношения $\delta = \frac{1}{\sqrt{N}} \leq 0,03$ вычислить величину N ;
- 2) набрать за произвольно выбранное время амплитудное распределение;
- 3) сравнить число импульсов в максимуме амплитудного распределения с расчетным и, если измеренная величина оказывается меньше расчетной, нужно увеличить время набора информации в соответствующее число раз.

6. ВВОДНОЕ ЗАНЯТИЕ В ЛАБОРАТОРИИ «МЕТОДЫ РЕГИСТРАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЙ»

Цель работы: ознакомление с методикой ядерно-физического эксперимента, детекторами ионизирующих излучений и их основными характеристиками, ядерно-физической аппаратурой.

Рабочее задание

1. Получить у преподавателя контрольные вопросы по теоретической части вводного занятия и ответить на них письменно в отчете. При ответе рекомендуется использовать рис. 1 – 9, которые иллюстрируют принципы действия ионизационных и сцинтилляционных детекторов и некоторые стандартные экспериментальные методики.

2. Ознакомиться со структурной схемой лабораторной работы, предложенной преподавателем, привести ее в отчете.

3. С помощью преподавателя или дежурного инженера включить установку, получить на осциллографе импульсы с выхода электронного тракта, подключенного к детектору. Записать с указанием масштаба параметры импульсов.

4. Изучить инструкцию по работе с анализатором импульсов на базе персонального компьютера. Установить время измерения в диапазоне 1-2 мин.

5. Набрать распределение импульсов по амплитудам. Проанализировать полученное распределение. Выделить характерные участки, по которым можно идентифицировать энергию регистрируемых частиц.

6. Получить у преподавателя величину статистической ошибки, которой должно удовлетворять число импульсов в максимуме амплитудного распределения, произвести расчет требуемого числа импульсов. Сравнить величину, полученную в эксперименте, с расчетной и при необходимости уве-

личить время измерений в соответствующее число раз. При выбранном времени измерений повторить набор информации.

7. Повторить измерения п. 6 для нескольких известных энергий излучения (возможно использование источника, который излучает две, три или более линий одновременно).

8. Построить гистограммы полученных распределений. Выполнить энергетическую калибровку шкалы анализатора. Определить полное абсолютное и относительное энергетическое разрешение спектрометра для используемых в опыте значений энергий.

9. Все результаты вычислений и измерений привести в отчете, составленном в соответствии с требованиями, изложенными в приложении к данной лабораторной работе.

Контрольные вопросы и задания

1. Нарисовать эквивалентную схему включения ионизационного детектора.

2. В чем заключается принцип работы ионизационных детекторов?

3. Работа каких детекторов основана на ионизационном методе регистрации?

4. Из каких элементов состоит сцинтилляционный детектор?

5. Нарисовать эквивалентную схему включения сцинтилляционного детектора.

6. Зачем в усилителе используют дифференцирующую $R_d C_d$ - цепочку?

7. Почему при регистрации моноэнергетических частиц амплитуды импульсов на выходе спектрометра флуктуируют?

8. Дать определение пропорционального детектора.

9. В чем заключается принцип получения дифференциального распределения импульсов по амплитудам?

10. Дать определение полного абсолютного и относительного энергетического разрешения спектрометра для данной энергии частиц.

11. Как измерить полное абсолютное и относительное энергетическое разрешение спектрометра для данной энергии частиц?

12. Какими газами обычно наполняют газовые ионизационные детекторы и почему?

13. Как происходит регистрация незаряженных частиц ионизационными детекторами?

14. Оценить максимальную амплитуду импульса на выходе ионизационной камеры, заполненной аргоном, при регистрации альфа-частиц с $E_\alpha = 1$ МэВ, считая, что $C_{\text{экв}} = 20$ пФ.

15. Как обычно графически представляют распределение импульсов по амплитуде?

16. Что такое аппаратурная форма линии спектрометра?

17. Какими параметрами характеризуется распределение импульсов по амплитудам?

18. Как осуществляется энергетическая калибровка спектрометра?

19. Как выбрать время измерения при заданной статистической ошибке?

Список литературы

1. Абрамов А.И., Казанский Ю.А., Матусевич Е.С. Основы экспериментальных методов ядерной физики. М.: Энергоатомиздат, 1985.
2. Ляпидевский В.К. Методы детектирования излучений. М.: Энергоатомиздат, 1987.
3. Лавренчик В.Н. Постановка физического эксперимента и статистическая обработка его результатов. М: Энергоатомиздат, 1986.
4. Пятков Ю.В., Федотов С.Н. Лабораторный практикум «Методы обработки результатов измерений». М: МИФИ, 2001.

ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ОТЧЕТУ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Отчет о проделанной работе должен соответствовать форме научных статей и обязательно содержать:

цель работы – кратко формулируется поставленная перед экспериментатором физическая задача;

теоретическая часть – кратко излагается назначение и принцип работы исследуемого детектора, его наиболее характерные параметры, функциональная схема лабораторной установки; приводятся, если это требуется в описании лабораторной работы, предварительные расчеты и оценки исследуемых величин;

экспериментальная часть – содержит обработанные экспериментальные результаты с обязательной оценкой погрешности проведенных измерений. Если в работе снимаются осциллограммы, то они должны быть представлены с обязательным соблюдением временных и амплитудных соотношений;

заключение – в сжатой форме даются основные выводы по каждому экспериментальному разделу; проводятся сравнения полученных экспериментальных результатов с теоретическими расчетами, анализируются расхождения между ними.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОШИБОК РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Средним значением (или математическим ожиданием) случайной величины называют величину

$$\bar{x} = M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

или

$$\bar{x} = M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx,$$

где $p(x)$ – закон распределения случайной величины.

2. Среднее значение квадрата отклонений случайной величины от \bar{x} называют *дисперсией*. Для дискретной случайной величины дисперсия равна

$$D(x) = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 p(x_i) = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

и для непрерывной случайной величины

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x)dx = \overline{x^2} - \bar{x}^2.$$

Неотрицательное значение корня квадратного из дисперсии $\sigma = \sqrt{D(x)}$ называют *средним квадратическим отклонением* случайной величины.

3. Для n независимых случайных величин Z_i дисперсия суммы этих величин равна сумме дисперсий:

$$D\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right) = \sum_{i=1}^n D(Z_i).$$

Это свойство аддитивности дисперсий широко используется на практике. Так, например, если распределение импульсов по амплитудам на выходе спектрометрического тракта ап-

проксимируется нормальным распределением, то полное абсолютное энергетическое разрешение можно представить:

$$\Delta \varepsilon_n^2 = (2,35)^2 D_n = (2,35)^2 \sum_i D_i,$$

где D_i характеризуют независимые источники разброса амплитуд импульсов.

4. Биномиальное распределение. Определяет вероятность того, что из ограниченного числа независимых N_0 событий N произойдет с благоприятным исходом, при условии, что p – вероятность благоприятного исхода для каждого из N_0 событий:

$$p(N) = C_{N_0}^N p^N (1-p)^{N_0-N}.$$

Для биномиального распределения $\bar{N} = N_0 p$,

$$D(N) = N_0 p(1-p) = \bar{N} \left(1 - \frac{\bar{N}}{N_0}\right).$$

В лабораторном практикуме в работе «Счетчик Гейгера – Мюллера» определение погрешности эффективности регистрации космических частиц с помощью телескопа счетчиков – типичный случай использования биномиального распределения.

5. Распределение Пуассона. При $N_0 \rightarrow \infty$ биномиальное распределение переходит в распределение Пуассона:

$$p(N) = \frac{(\bar{N})^N}{N!} e^{-\bar{N}},$$

где N , как и в случае нормального распределения, принимает любые положительные целочисленные значения, \bar{N} – любое, в том числе и дробное положительное значение.

Для распределения Пуассона $D(N) = \bar{N}$.

Законом Пуассона описывается ряд важных физических явлений. В частности, если период полураспада радиоактивного источника $T_{1/2}$ много больше интервала времени ΔT , в течение которого происходит регистрация числа распадов,

распределение числа событий подчиняется распределению Пуассона.

В лабораторном практикуме используются источники, для которых $T_{1/2} \gg \Delta T$, поэтому за среднеквадратическое отклонение непосредственно измеренной величины N принимают:

$$\sigma = \sqrt{N}.$$

6. Распределение Гаусса (нормальное). При $\bar{N} \rightarrow \infty$, а на практике можно считать, что при $\bar{N} \geq 20$, распределение Пуассона переходит в распределение Гаусса:

$$p(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{N}}} e^{-\frac{(N-\bar{N})^2}{2\bar{N}}}.$$

Для нормального распределения $D(N) = \bar{N}$. Приведенное распределение представляет собой частный случай гауссова закона распределения плотности вероятности для случайной величины x :

$$p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx$$

со средним значением \bar{x} и дисперсией $D(x) = \sigma^2$.

Распределение Гаусса широко используется при анализе экспериментальных результатов, что является следствием центральной предельной теоремы теории вероятностей. В соответствии с этой теоремой, если случайная конечная величина представляет собой сумму большого числа независимых случайных величин практически с произвольными распределениями, при условии конечных средних и дисперсий, то в пределе случайная конечная величина распределена по Гауссу. Другими словами, многократная свертка произвольных распределений приводит к нормальному распределению.

7. Погрешности не прямых измерений (формула переноса ошибок измерений). Если искомая величина Y связана с непосредственно измеряемыми величинами x_1, x_2, \dots, x_n функцией $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_1, x_2, \dots, x_n – независимые случайные

величины, имеющие среднеквадратические отклонения $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, то

$$\sqrt{D(Y)} = \sigma(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma^2(x_i)}.$$

8. Статистические параметры экспериментальных результатов. Рассмотренные выше функции распределения описывают генеральные совокупности, т.е. набор всех возможных значений, которые может принимать случайная величина.

В экспериментах всегда имеют дело с конечным числом значений случайной величины (выборкой). Для оценки неизвестных параметров генеральной совокупности – среднего значения и дисперсии – вводят статистические параметры: выборочное среднее значение \tilde{x} ; $D_{n-1}(x)$ – дисперсию измеряемой величины, т.е. дисперсию распределения отдельных значений измеряемой величины около \tilde{x} ; $D(\tilde{x})$ – дисперсию выборочного среднего.

Выборочное среднее. Наилучшим приближением к истинному среднему является арифметическое среднее \tilde{x} измеренных значений x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \approx \bar{x}.$$

Дисперсия измеряемой величины. Оценка истинной дисперсии (состоятельная и несмещенная) $D(x)$, полученная в результате конечного числа n измерений, имеет вид:

$$D_{n-1}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2}{n-1} = \sigma_{n-1}^2(x) \approx D(x).$$

Дисперсия выборочного среднего. Оценкой дисперсии выборочного среднего является величина

$$D(\tilde{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2}{n(n-1)} = \sigma^2(\tilde{x}).$$

В соответствии с центральной предельной теоремой статистики, если случайная величина имеет среднее значение \bar{x} и дисперсию $D(x)$, то при стремлении объема выборки n к бесконечности (практически, если $n \geq 20$) распределение выборочного среднего \tilde{x} будет стремиться к гауссовому со средним \bar{x} и дисперсией

$$D(\tilde{x}) = \frac{D(x)}{n} \approx \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2}{n(n-1)}.$$

Стремление к нормальному распределению при записи результата измерений в виде $\tilde{x} \pm \sigma(\tilde{x})$ означает, что неизвестная величина \tilde{x} находится в интервале $\tilde{x} \pm \sigma(\tilde{x})$ с вероятностью 0,68. Эта вероятность повышается до 0,95 для интервала $\tilde{x} \pm 2\sigma(\tilde{x})$.

В частности, если распределение выборки близко к нормальному распределению, оценкой ширины этого распределения на полувысоте является:

$$\Delta_{1/2} \cong 2,35 \sqrt{D_{n-1}(x)} = 2,35 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2}{n-1}}.$$

9. Метод наименьших квадратов для линейной функции (в случае равноточных измерений). Предположим, что имеется совокупность экспериментальных данных в виде пар измеренных чисел $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Пусть нам известно, что искомая зависимость между y и x должна быть линейной, т.е. $y = a + bx$. Таким образом, зависимость $y = a + bx$ определяет $y(x_i)$ в каждой точке x_i . Эта зависимость будет наилучшей, если сумма квадратов отклоне-

ний, измеренных y_i от значений, вычисленных $y(x_i) = a + bx_i$, окажется минимальной:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2 = \min .$$

Из этого условия находятся неизвестные параметры a и b прямой:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{D};$$

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{D},$$

где

$$D = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 .$$

Найденные по методу наименьших квадратов значения a и b выражаются через суммы случайных значений величин y и, следовательно, имеют погрешности, которые выражаются следующими формулами:

$$\sigma(a) = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{D}}, \quad \sigma(b) = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{D}}, \quad \text{где } \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2}{n - 2}} .$$